

# 基于稀疏表达的微弱信号提取及检测方法

汤雅妃, 张云勇, 郭志斌

(中国联通研究院, 北京 100032)

**摘要:** 首先简要介绍了稀疏表达模型以及其常用的求解方法; 然后讨论了一种基于稀疏表达的微弱信号提取及检测方法; 在此基础上, 为了减少时间与空间复杂度, 开发了一种快速求解算法; 最后给出信号的提取结果以及定性定量分析, 并用大量的实验结果证明讨论的基于稀疏表达的微弱信号提取及检测方法的顽健性与自适应能力。

**关键词:** 稀疏表达; 微弱信号; 信号提取; 信号检测

**中图分类号:** TN911.72

**文献标识码:** A

## Approach to weak signal extraction and detection via sparse representation

TANG Ya-fei, ZHANG Yun-yong, GUO Zhi-bin

(China Unicom Research Institute, Beijing 100032, China)

**Abstract:** The sparsity models and their popular evaluation algorithms were presented. A sparse representation based approach to weak signal extraction and detection was proposed. Furthermore, a fast algorithm was developed to reduce the computational complexity of the proposed method. In addition, both qualitative and quantitative evaluation methods were designed to analyze the proposed approach. A large number of experiments demonstrate the robustness and the adaptivity of the proposed approach.

**Key words:** sparse representation; weak signal; signal extraction; signal detection

### 1 引言

微弱信号检测技术是通信领域的重点也是难点, 在强噪声背景下, 快速、准确地还原出有用的微弱信号, 对通信技术的发展具有重要的现实意义。特别是在现代的战术通信系统中, 包括雷达以及声呐通信系统, 由于通信环境的复杂性, 目标信息通常会被淹没在各式各样的干扰背景噪声中, 增加了目标特征提取的难度。

在强噪声背景下, 接收端通常无法准确断定待测信号出现的时间点, 导致在信号采集的时间范围内, 只有其中的一部分时间是同时含有信号和噪声的, 而其他时间范围内出现的均是纯噪声。噪声强度达到一定程度后, 将很难与信号部分区别。然而现有的信号检测方法均建立在待测信号和噪声信号同时被采样的前提假设上, 直接对采样信号进行

去噪、特征值提取。由于需要拟合长时间的强噪声部分, 检测结果存在一定误差。

针对上述微弱信号检测方法的缺陷, 本文设计了一种基于稀疏表达的微弱信号提取和重建方法, 该方法无需信号参数信息, 即可高效地提取出信号, 很大程度上减少了系统的应用局限性和对应用环境的敏感性, 大大增强了系统的灵活性与自适应能力。

### 2 稀疏表达概述

所谓稀疏表达, 就是将待测信号转换到子空间表示域, 使在该子空间下信号表示是稀疏的 (即大部分分量为零)。该子空间被约束为冗余子空间, 其基向量不强制为互相正交, 这样待测信号可表示成该子空间中少数几个基向量的线性组合。与传统的信号处理方法相比, 冗余基的使用使其在对信号

的表达与重建方面更加灵活。

### 2.1 表达原理

给定一个信号  $\mathbf{x} \in R^{n \times 1}$ ,  $n$  为其长度, 稀疏理论试图寻找一种对该信号的线性描述方式, 以使该描述方式中的大部分元素都为 0。为此定义一个子空间  $\mathbf{D} \in R^{m \times m}$ , 其中,  $m \gg n$ , 即  $\mathbf{D}$  是冗余的, 则信号  $\mathbf{x}$  可以表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{z} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{z} \in R^{m \times 1}$  为信号  $\mathbf{x}$  在  $\mathbf{D}$  中的表达,  $m$  为表达的长度。在稀疏表达研究领域, 通常称  $\mathbf{D}$  为字典, 称其各列向量为基元。显然, 式 (1) 为一个欠定线性方程组, 其解向量  $\mathbf{z}$  有无穷多个。为此, 需要在式 (1) 中加入其他的约束项, 来保证求得的解  $\mathbf{z}$  是足够稀疏的。为了衡量一个解向量是否是稀疏, 通常使用  $\ell_0$  - “范数” 来度量一个向量的稀疏性, 记为  $\|\mathbf{z}\|_0$ , 定义  $\|\mathbf{z}\|_0 = \sum_i |z_i|^0$ , 即求向量  $\mathbf{z}$  中非 0 元素的数量。 $\|\mathbf{z}\|_0$  越小,  $\mathbf{z}$  越稀疏 (非 0 元素越少)。基于  $\ell_0$  - “范数” 的概念, 则可将要解决的问题改写为

$$\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{z}\|_2, \text{ subject to } \|\mathbf{z}\|_0 \leq k \quad (2)$$

即寻找一个解向量  $\mathbf{z}$ , 使其非 0 元素个数至多为  $k$ , 或者以另一种方式描述该问题

$$\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{z}\|_0, \text{ subject to } \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{z} \quad (3)$$

即寻找可以准确描述信号  $\mathbf{x}$  的表达  $\mathbf{z}$ , 且  $\mathbf{z}$  是所有可行的表达中最稀疏的。

### 2.2 求解方法

相关理论已经证明了当  $\mathbf{z}$  满足一定条件下, 式 (2)、式 (3) 解的唯一性<sup>[1]</sup>。但是由于其中涉及了  $\ell_0$  - “范数”, 而  $\ell_0$  - “范数” 是非凸的, 这导致直接求解具有高度的计算复杂度。近年来, 研究工作者们提出许多求解式 (2)、式 (3) 的高效数值算法。1) 贪心算法, 如匹配追踪(matching pursuit)<sup>[2]</sup>、正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit)<sup>[3]</sup>、弱匹配追踪(weak matching pursuit)<sup>[4]</sup>、阈值(thresholding)算法<sup>[5]</sup>等; 2) 凸松弛方法, 如基追踪(basic pursuit)<sup>[6]</sup>、迭代重加权最小二乘(iterative reweighted least square)等; 3) 快速近似算法, 如 LASSO(least absolute shrinkage and selection operator)<sup>[7]</sup>、迭代阈值收缩(iterative thresholding)算法<sup>[8]</sup>等。

其中, 贪心算法将式 (2)、式 (3) 中的问题分解为若干个子问题, 在求解的每一步中都试图用

一个最优匹配来求解一个子问题, 最后的解由所有子问题的解综合而成。凸松弛方法将要求解的非凸问题转化成一个凸优化问题, 从而可以快速高效的求解。快速近似算法则是允许式 (2)、式 (3) 中所陈述的问题中存在噪声的干扰, 即将原问题转化成以下的新问题

$$\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{z}\|_0, \text{ subject to } \|\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{z}\|_2 \leq \varepsilon \quad (4)$$

其中,  $\varepsilon$  为加性噪声的功率, 式 (4) 是式 (3) 的顽健(容错)版本。式 (4) 中的问题通常也会应用凸松弛技术将其转化成一个凸优化问题, 进而快速高效地求解。

## 3 信号检测模型

### 3.1 问题描述

噪声信号可看作是均值为 0 的一类随机信号。由于最常见的是白噪声信号, 并且大部分噪声信号都可以作为白噪声进行处理。因此, 在强噪声背景下, 采集到的微弱观测信号可以用以下的模型来描述

$$\mathbf{f} = \mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{f}$  为采集到的观测信号,  $\mathbf{s}$  为待测信号,  $\mathbf{v}$  为加性高斯白噪声。

在信号采集的时间范围内, 仅是其中的一部分时间是同时含有待测信号和噪声的, 而其他时间范围内出现的均是纯噪声。噪声强度达到一定程度后, 将很难与信号部分区别。所以需要待测信号从一次信号采集的观测中提取出来。下式可以用来描述系统一次采样到的信号

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{v}_{n_1 \times 1}^T, \mathbf{f}_{N_s \times 1}^T, \mathbf{v}_{n_2 \times 1}^T]^T \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{x}$  为一次采集的观测信号,  $\mathbf{v}$  为纯噪声信号,  $N_s$  为待测信号的采样长度,  $n_1$  和  $n_2$  分别为待测信号出现之前和之后采到的噪声长度。由于从  $n_1 + 1$  采样时刻直到  $n_1 + N_s$  采样时刻范围内的采样值才是需要还原的待测信号。所以式 (6) 揭示了将要完成的任务: 估计在采集过程中待测信号出现的时间, 即估计  $n_1$  的值, 然后把这个范围内的采样值提取出来, 再将原始信号恢复。

### 3.2 模型设计

与传统的纯时延系统不同, 本文将微弱信号的提取问题建模成一个混合信号的分离问题。即在一次信号采集中, 将采集到的信号看作为两路信号的混合。一路是纯粹的噪声信号; 另一路则是在待测

信号的基础上，使用常 0 信号补齐采样值。两路信号混合成系统在一次采集过程中所得到的信号。该过程可以用下面的公式描述

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{g}^T + \mathbf{v}^T = \left[ \boldsymbol{\theta}_{n_1 \times 1}^T, \mathbf{s}_{N_s \times 1}^T, \boldsymbol{\theta}_{n_2 \times 1}^T \right]^T + \mathbf{v}_{N \times 1}^T \quad (7)$$

其中， $\boldsymbol{\theta}$  表示全部分量都为 0 的列向量， $\mathbf{g}^T = \left[ \boldsymbol{\theta}_{n_1 \times 1}^T, \mathbf{s}_{N_s \times 1}^T, \boldsymbol{\theta}_{n_2 \times 1}^T \right]^T$  为补 0 后的待测信号（简称填充信号），采样总长度  $N = n_1 + N_s + n_2$ ， $\mathbf{v}$  为高斯白噪声向量。

图 1 给出了本文设计的信号提取及重建方法的工作流程。首先，使用针对应用环境设计的字典，求解填充信号和噪声信号的分离模型，将采样到的观测信号分离为填充信号与高斯白噪声 2 部分。接着，通过定义的匹配度，可以计算出待测信号在采样点区间的起始位置，这样只需要去掉填充的 0 值即可得到待测信号的采样点区间。接下来将第一次分离后提取出来的带有噪声的待测信号再次应用上述的分离模型，对带噪声的信号恢复和精确重建，最终系统输出重新拟合后的待测信号。

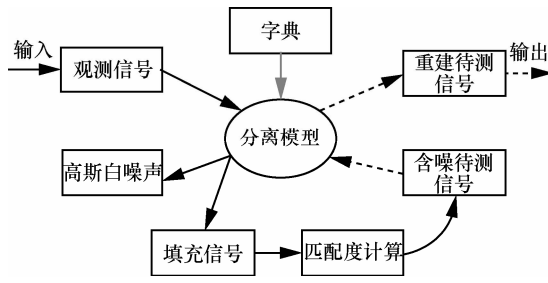


图 1 信号提取及检测流程  
(直线箭头：一次分离路径；虚线箭头：二次分离路径)

给定采集到的观测信号  $\mathbf{x}$  与 2 个预先定义的字典  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ ，基于定义的稀疏表达模型，将定义下面的混合模型

$$\min_{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2} \|\mathbf{z}_1\|_0 + \|\mathbf{z}_2\|_0, \text{ subject to } \mathbf{x} = \mathbf{D}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{z}_2 \quad (8)$$

其中， $\mathbf{D}_1$  为求解填充信号的稀疏表达时所用的字典， $\mathbf{D}_2$  为求解高斯白噪声的稀疏表达时所用的字典， $\mathbf{z}_1$  为填充信号的表达向量， $\mathbf{z}_2$  为高斯白噪声的表达向量。设式 (8) 的解为  $(\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{z}}_2)$ ，则通过分别重建填充信号部分与噪声部分即可实现混合信号的分离。

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathbf{D}_1 \hat{\mathbf{z}}_1 \\ \mathbf{v} = \mathbf{D}_2 \hat{\mathbf{z}}_2 \end{cases} \quad (9)$$

鉴于符号表示的一致性考虑，改写式 (8) 为

$$\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{z}\|_0, \text{ subject to } \|\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{z}\|_2 \leq \varepsilon \quad (10)$$

其中， $\mathbf{z}^T = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T]^T$ ， $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2]$ ，同时式 (10) 也考虑了容错性能，使其重建平方误差和不超过  $\varepsilon^2$ 。

### 3.3 字典设计

考虑到待测信号是不同频率的正弦成分的合成信号，字典  $\mathbf{D}$  基元可以设计成具有不同频率、不同相位、不同延时的正弦信号。本文使用字典  $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2]$ ，其中， $\mathbf{D}_1$  用来重建填充信号，其每个基元设计为  $[\mathbf{d}_1^T, \mathbf{d}_0^T, \mathbf{d}_2^T]^T$ ， $\mathbf{d}_1$  和  $\mathbf{d}_2$  分别由相应长度的 0 向量组成， $\mathbf{d}_0$  各元素由下式生成

$$d = \sin(2\pi f_i t_k + \theta_j), \quad i=1, \dots, N_f, j=1, \dots, N_\theta, k=1, \dots, N_s \quad (11)$$

其中， $f_i$  为预先定义的可能的  $N_f$  个频率中的第  $i$  个频率值， $t_k$  为采样的第  $k$  个采样点， $\theta_j$  为预先定义的可能的  $N_\theta$  个相位中的第  $j$  个相位值， $N_s$  为待测信号的采样点长度。设观测信号的采样点总长为  $N$ ，则  $\mathbf{d}_1$  和  $\mathbf{d}_2$  分别设计为

$$\begin{cases} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}_{n_1 \times 1} \\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}_{n_2 \times 1} \end{cases}, \quad \begin{cases} n_{1,i} = 0, 1, \dots, N - N_s - 1 \\ n_{2,i} = N - N_s - n_{1,i} \end{cases} \quad (12)$$

因此，字典  $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{R}^{N \times M}$ ， $M = N_f N_\theta (N - N_s)$ ， $M \ll N$ ，是一个冗余的字典。最后，将  $\mathbf{D}_1$  的各列均归一化至  $\ell_2$ -单位长度，即  $\|\mathbf{d}_i^T\|_2 = 1, j=1, \dots, M$ 。 $\mathbf{D}_2$  用来重建观测信号中关于高斯白噪声的成分，所以直接使用一个单位矩阵  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 。至此，字典  $\mathbf{D}$  为一个  $N(M + N)$  的矩阵，仍然是冗余的，可以产生足够稀疏的信号表达向量。

## 4 求解算法

### 4.1 基本算法实现

本文使用凸松弛技术求解式 (10) 所描述的问题，并实现了对待测信号采集范围的提取。首先，将式 (10) 中描述的问题转化为一个凸优化问题进行求解，即将式 (7) 中的  $\ell_0$ -“范数”松弛到  $\ell_1$ -范数，如下

$$\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{z}\|_2 + \lambda \|\mathbf{z}\|_1 \quad (13)$$

其中， $\lambda$  为惩罚项参数。所以，式 (13) 又可以看成是使用  $\ell_1$ -正则约束的最小二乘拟合问题。目前已经有很多求解式 (13) 的高效方法<sup>[7,9,10]</sup>。求得解

向量  $\mathbf{z}^T = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T]^T$  之后, 使用  $\mathbf{z}_1$  重建填充信号, 即

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}_1 \mathbf{z}_1 \quad (14)$$

接下来, 需要在填充信号中去掉补齐的 0, 从而定位到待测信号在采样过程中出现的时间。本文采取的策略是在重建的填充信号上线性搜索与采样信号最为匹配连续  $N_s$  个信号值。匹配程度的度量以内积为标准。因此, 在采样点坐标轴上滑动截取出  $N_s$  个重建信号值, 在同样的采样位置截取  $N_s$  个观测信号值, 将 2 个截取出来的信号做内积。这样会得到  $N - N_s$  个内积值。最后使用内积最大值所对应的采样点作为估计的待测信号的起始采样位置, 在观测信号上向后截取出来  $N_s$  个采样值, 即提取出来带噪声的待测信号  $f$  的估计值。这样, 就可以在此提取信号的基础上, 再进行一次分离, 做后续的更为精确的信号降噪、重建等处理。图 2 给出了本文设计的信号提取和重建方法的主要步骤。

输入: 观测信号 $\mathbf{x}$ , 采样长度 $N$ , 待测信号采样长度 $N_s$ 输出: 重建的待测信号 $\tilde{\mathbf{s}}$ 求解信号分离模型 建立字典: 根据 3.3 节字典设计所列的方法得到 $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2]$ 计算 $\mathbf{x}$ 的表达向量: $\mathbf{z}^T = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T]^T$ , 即计算式 (13) 的解 重建填充信号: $\mathbf{g} = \mathbf{D}_1 \mathbf{z}_1$ 确定提取范围 1) 计算分段匹配度 循环: $k = 1:n, n = N - N_s$ 设定测试采样点范围: $R = \{k : k + n - 1\}$ 截取相应信号: 截取观测信号 $\mathbf{x}_R^k$ , 截取的填充信号 $\mathbf{g}_R^k$ 计算匹配度: $(\mathbf{x}_R^k)^T \mathbf{g}_R^k$ 2) 估计提取范围 估计起始采样位置: $i = \arg \max_{1 \leq k \leq n} (\mathbf{x}_R^k)^T \mathbf{g}_R^k$ 提取带噪声的待测信号: $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{x}(i : i + N_s - 1)$ 重建原始的待测信号: $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{z}}_1$ , 其中 $\tilde{\mathbf{z}}^T = [\tilde{\mathbf{z}}_1^T, \tilde{\mathbf{z}}_2^T]^T$ 为 $\tilde{\mathbf{g}}$ 的表达向量
--

图 2 基于稀疏表达的信号提取及重建算法

### 4.2 快速算法设计

首先, 简要分析上述基本算法。在字典设计时, 其基向量包含了给定范围内不同频率、不同相位、不同延时的正弦信号。设采集到的观测信号长度为  $N$ , 待测信号长度为  $N_s$ , 根据系统定义的频率数量  $N_f$ , 相位数量  $N_\theta$ , 则针对填充信号设计的字典  $\mathbf{D}_1$  的行数  $M = N_f N_\theta (N - N_s)$ , 这样字典  $\mathbf{D}$  的总容量为  $N(M + N)$ 。其规模对系统的时间和空间复杂度都提出了巨大的挑战。为此, 本文提出一种快速算

法, 不仅加速信号提取的速度, 更大大减少了空间复杂度的量级。

其次, 本文从降低字典规模的任务入手, 将其分解成多个小规模字典。通过这些小规模字典分别计算结果, 合成为一个综合的处理结果, 最后在此综合结果的基础上做出信号提取位置的决策。这些小规模字典可以动态地实时生成, 因此节省了大量的存储空间, 并且大大加速了分离模型的求解速度。通过分析可以发现, 字典基元使用全部的  $N$  个采样值是没有必要的, 因为只需要提取出其中的  $N_s$  个连续采样点。因此可以逐个对连续的  $N_s$  个采样值求解分离模型, 每分离一次进行一次内积匹配, 记录匹配值; 然后从中选择一个最佳匹配的分离结果作为将要提取的信号。已知待测信号的采样点长度  $N_s$ , 可以知道观测信号中纯粹的高斯白噪声的采样长度:  $N_\sigma = N - N_s$ 。把前述的大规模字典分解为  $N_\sigma$  个小规模字典, 每个小规模字典的基元只使用  $N_s$  个采样值。

更进一步地, 由于在本文构造的分离模型中, 使用正弦族信号作为字典基元对高斯白噪声的拟合效果相对较差, 而对正弦族信号的拟合效果非常准确并且顽健。这样, 前述的  $N_\sigma$  个小规模字典可以只使用一个小字典来代替, 该字典仍然使用前述的字典构造方法, 即字典  $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2]$ , 其中  $\mathbf{D}_1$  使用式 (11) 生成,  $\mathbf{D}_2$  为一个单位矩阵。这样改进后的字典为一个  $N_s$  行、 $N_f N_\theta + N_s$  列的矩阵, 其模型至少减少了  $\frac{1}{N-1}\%$ , 并且  $N_s$  越小, 字典规模减小得越厉害。

在算法上, 先循环截取观测信号, 依次作为候选信号; 再根据新设计的小规模字典, 依次进行一次分离, 重建候选信号; 通过内积求和, 计算重建匹配度; 记录匹配度最大值作为待测信号起始位置估计; 从观测信号中提取出待测信号采样区间, 进行二次分离, 精确重建待测信号。图 3 给出了基于稀疏表达的信号提取和重建方法的快速求解算法。

### 5 实验结果与分析

为了验证信号检测性能, 选用了最常用的降噪后做相关的检测方法作为基准方法, 分别给出了定性和定量的评价结果。同时, 在此也详细分析了相对于不同的信噪比影响、不同的信号波形构成的情况下, 本文方法在统计意义下的处理性能及其稳定性。

输入：观测信号  $\mathbf{x}$ ，采样长度  $N$ ，待测信号采样长度  $N_s$   
 输出：重建的待测信号  $\tilde{\mathbf{s}}$

- 1) 建立字典：根据式(11)构造 4.2 节快速算法设计中提到的小规模字典  $\mathbf{D}=[\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2]$
- 2) 循环： $k=1:N_s$   
 截取候选信号部分： $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}(k:k+N_s-1)$   
 计算  $\mathbf{y}^k$  的表达向量： $\mathbf{z}^k = [\mathbf{z}_1^k, \mathbf{z}_2^k]^T$ ，即计算式(13)的解  
 重建候选信号： $\mathbf{g}^k = \mathbf{D}_1 \mathbf{z}_1^k$   
 计算匹配度： $(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{g}^k$
- 3) 估计起始采样位置： $i = \arg \max_{1 \leq k \leq N_s} (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{g}^k$
- 4) 提取带噪声的待测信号： $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{x}(i:i+N_s-1)$
- 5) 重建原始的待测信号： $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{z}}_1$ ，其中  $\tilde{\mathbf{z}}^T = [\tilde{\mathbf{z}}_1^T, \tilde{\mathbf{z}}_2^T]^T$  为  $\tilde{\mathbf{g}}$  的表达向量

图 3 基于稀疏表达的信号提取及重建方法的快速求解算法

在搭建的实验环境中，对实验参数进行如下设置。

信号采集相关参数：输入信号频率为 100~150 kHz，每次采集  $N=120$  个样本点，其中信号样本点长度  $N_s=80$ 。

字典相关参数：频率分辨率为 1 kHz，则预先定义频率数量为  $N_f = \frac{(150-100)}{1} + 1 = 51$ ，相位分辨率为 0.1 rad，则预先定义相位数量  $N_\theta = \left\lceil \frac{2\pi}{0.1} \right\rceil = 63$  个，用于

填充待测信号的长度为  $120 - 80 = 40$ 。因此，字典是一个行数为 80、列数为  $51 \times 63 + 80 = 3293$  的冗余矩阵。

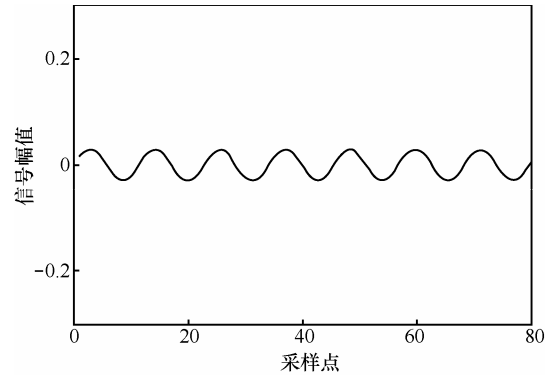
### 5.1 定性分析

#### 5.1.1 单一频率正弦信号的实验结果

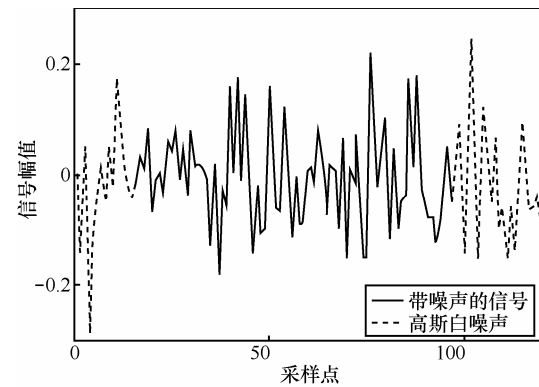
随机生成一个只含有单一频率的正弦信号，如图 4 (a) 所示。然后再加上一个高斯白噪声，信噪比为 -20 dB。接着，在其前后分别连接上 2 段随机生成的高斯白噪声，将其作为接收端的采样信号，如图 4 (b) 所示。本文的任务即是通过本发明方法准确地估计出带噪声信号曲线的采样点区间，并从噪声中恢复出来，尽可能准确地得到如图 4 (b) 中所示的原始待测信号。在本次实验中，待测信号的真实采样点区间为 [17, 97]。

图 5 分别给出了本文方法与基准方法判别的采样点区间的起始位置的匹配度。其中，基准方法的最大匹配度对应的采样区间起始位置出现在 15，而本文方法的最大匹配度对应的采样区间起始位置出现 17。图 6 给出了采用基准方法和本文方法，将

提取出带噪声的待测信号重建的结果，对比于图 5 (a) 中所示的原始信号可见，基准方法对信号的恢复的误差是比较大的，而本文方法可以准确地从噪声中恢复微弱的待测信号。



(a) 含有单一频率的原始正弦信号



(b) 加噪声的模拟采样信号

图 4 单一频率采样信号生成 (信噪比为 -20 dB)

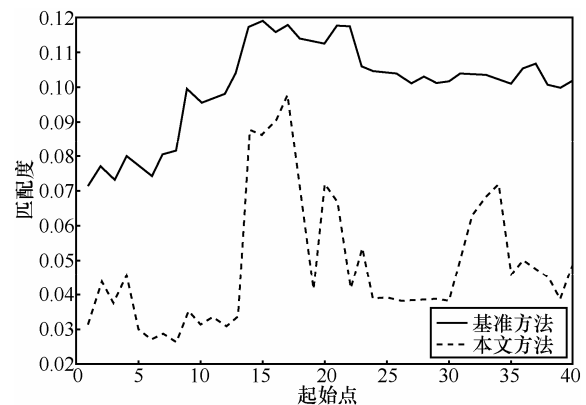


图 5 单一频率下基准方法与本文方法的信号采样区间匹配度曲线

#### 5.1.2 多个频率正弦信号的实验结果

在本文给出的实验中，待测信号由 3 个不同频率的正弦信号混合而成，如图 7 (a) 所示。然后再加上信噪比为 -30 dB 的高斯白噪声。接着，在其前后分别连接上 2 段随机生成的高斯白噪声，作为接

收端的采样信号,如图 7 (b) 所示。在本次实验中,水声信号的真实采样点区间为[31, 111]。

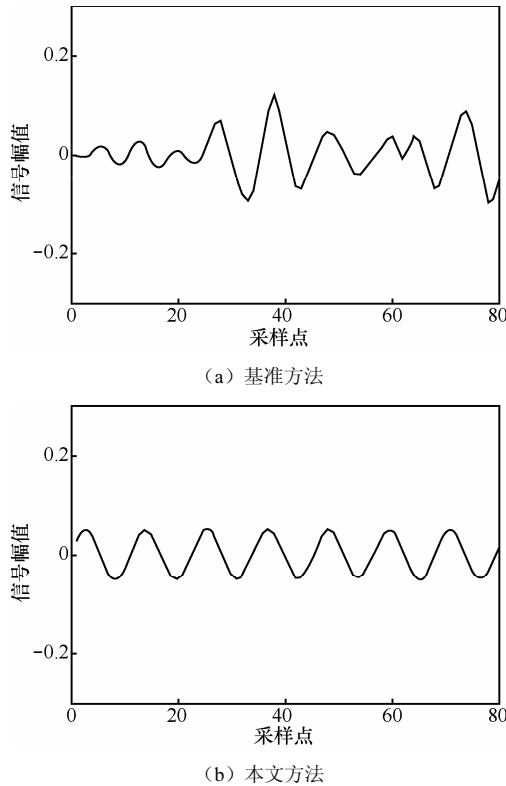


图 6 信噪比为-20 dB 时最终重建的单一频率信号

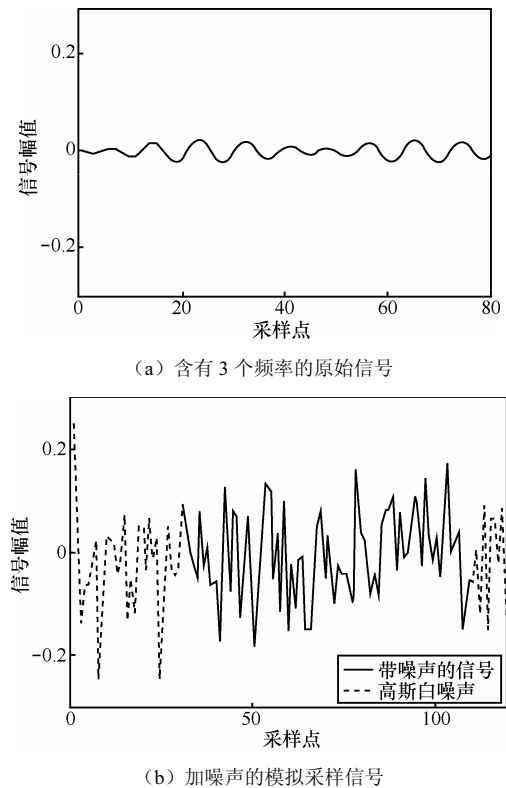


图 7 多频率采样信号生成 (信噪比为-30 dB)

图 8 分别给出了本文方法与基准方法判别的采样点区间的起始位置的匹配度。其中,基准方法的最大匹配度对应的采样区间起始位置出现在 10,而本文方法的最大匹配度对应的采样区间起始位置出现 31。图 9 对比了基准方法和本文方法将提取出带噪声的信号重建的结果,对比于图 7 (a) 中所示的原始信号可见,基准方法对信号恢复的误差是比较大的。本文方法可以较准确地从噪声中恢复出微弱原始待测信号。

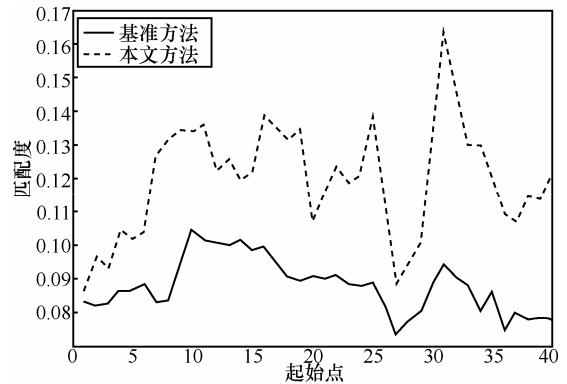


图 8 原始信号多频率下,基准方法与本文方法的信号采样区间匹配度曲线

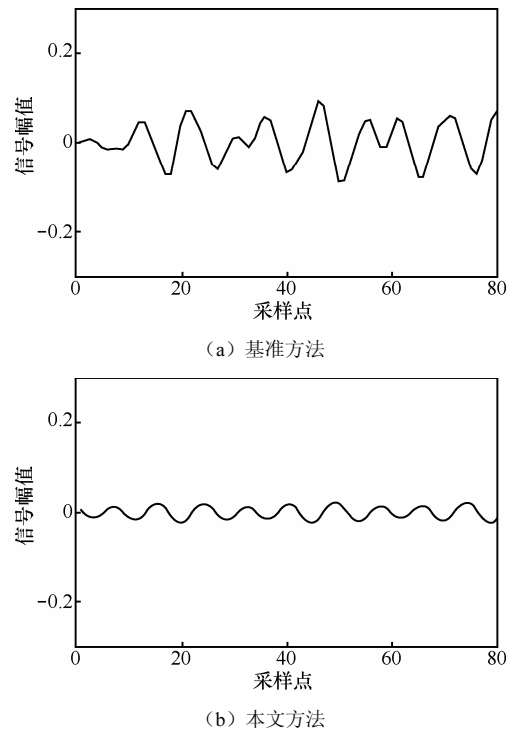


图 9 原始信号多频率下,信噪比为-30 dB,基准方法和本文方法最终重建的信号(原始信号含有 3 个频率)

## 5.2 定量分析

### 5.2.1 指标定义

为了检验本文讨论的信号提取方法的处理能

力和算法稳定性，需要考察其在统计意义下的性能。为了定量地评价本文方法的性能，本文将对成功率、重叠率、平均误差、标准误差这几个指标进行分析，其定义分别如下。

**定义 1** 对一次采集过程中的待测信号进行提取，如果其起始位置的估计值与真实值的偏差绝对值小于一个预定义的正数  $\delta$ ，则称本次提取是成功的。

**定义 2** 对一次采集过程中的待测信号进行提取，设算法对待测信号的采样范围的估计区间与真实的区间交集的采样点数量为  $N_{ol}$ ，真实的区间内采样点数量为  $N$ ，称比值  $\frac{N_{ol}}{N}$  为本次提取的重叠率。

**定义 3** 对多次采集过程中的待测信号进行提取，称其起始位置的估计值与真实值的偏差绝对值的平均值为平均误差。

**定义 4** 对多次采集过程中的待测信号进行提取，称其起始位置的估计值与真实值的偏差绝对值的标准差为标准误差。

根据不同大小的信噪比、不同数量的正弦频率成分，在每次实验中随机生成 1 000 个信号，分别按照上述定义的指标分析本次实验中的 1 000 次结果的平均性能。同样，在大量实验的基础上，本文给出了 2 种情况下的分析结果：含有单一频率的原始正弦信号

和含有多个频率的原始正弦叠加信号。

### 5.2.2 单一频率正弦信号的提取结果

首先，列出了信噪比分别为 -10 dB、-15 dB、-20 dB 和 -30 dB 时，基准方法和本文方法提取结果与真实值的平均重叠率。如表 1 所示，本文方法的重叠率均要高于基准方法。

表 1 不同信噪比下信号提取的重叠率（原始信号单一频率）

信噪比/dB	基准方法	本文方法
-10	0.89	0.91
-15	0.75	0.80
-20	0.67	0.70
-30	0.61	0.63

接下来，对比基准方法和本文方法的成功率和误差。图 10 分别给出 2 种方法在上述的 4 种信噪比下，相对于不同  $\delta$  取值时的成功率。由图所示，本文方法的处理结果均要好于基准方法的结果。图 11 给出了在上述的 4 种信噪比下，基准方法与本文方法对信号的提取结果的平均误差与标准误差。表 2 分别给出了该平均误差与标准误差的具体取值。综合考察，在此处的 2 项指标上，本文方法要优于基准方法。

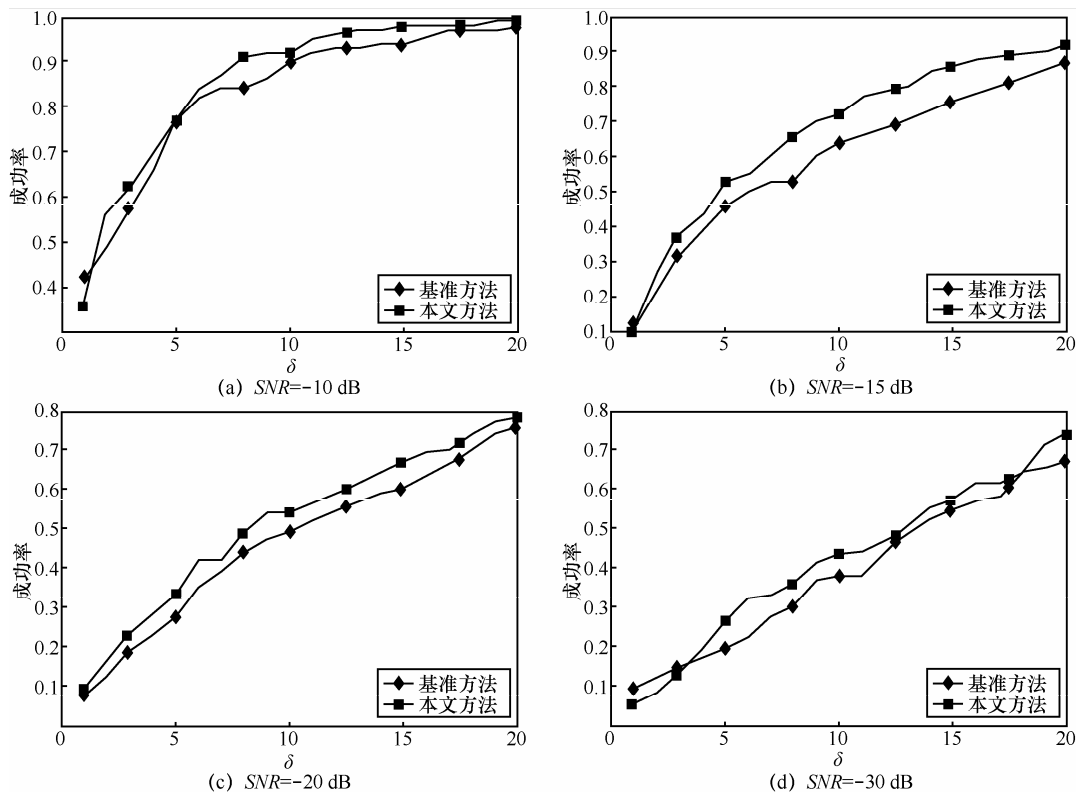


图 10 不同信噪比下，相对于不同  $\delta$  的信号提取成功率（原始信号单一频率）

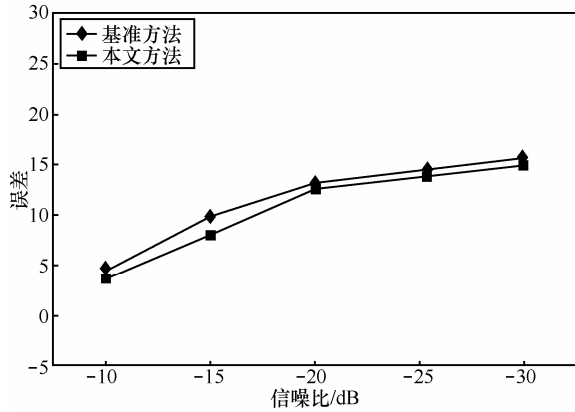


图 11 不同信噪比下信号提取的平均误差与标准误差 (原始信号单一频率)

表 2 不同信噪比下信号提取的平均误差和标准误差 (原始信号单一频率)

信噪比/dB	平均误差		标准误差	
	基准方法	本文方法	基准方法	本文方法
-10	4.30	3.63	6.31	5.49
-15	9.78	7.95	8.91	7.78
-20	13.05	12.47	9.70	9.60
-30	15.46	14.79	10.41	10.48

5.2.3 多个频率正弦信号的实验结果

下面分析在待处理的信号为多个频率的正弦叠加信号时本方法的性能。实验中，待处理信号由 5 个不同频率的正弦叠加而成。对于观测信号的信噪比，仍然分析取值分别为 -10 dB、-15 dB、-20 dB 和 -30 dB 时算法的性能。

表 3 给出了对于上述 4 种信噪比的观测信号提取结果的重叠率。由此可见，本文方法的重叠率均要高于基准方法。

表 3 不同信噪比下信号提取的重叠率 (原始信号含有 5 个不同频率)

信噪比/dB	基准方法	本文方法
-10	0.91	0.99
-15	0.90	0.93
-20	0.79	0.84
-30	0.68	0.71

图 12 分别给出了 2 种方法在上述 4 种信噪比下，相对于不同的  $\delta$  取值时的成功率。由图所示，本文方法的处理结果均要好于基准方法的结果。图 13 给出了在上述的 4 种信噪比下，基准方法与本文方法对信号的提取结果的平均误差与标准误差。表

4 分别给出了该平均误差与标准误差的具体取值。综合得出在此处的 2 项指标上，本文方法要优于基准方法。

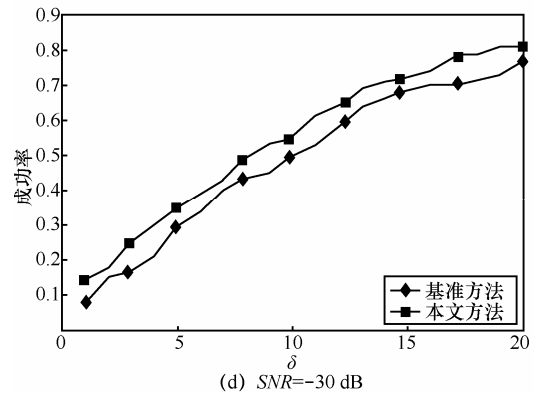
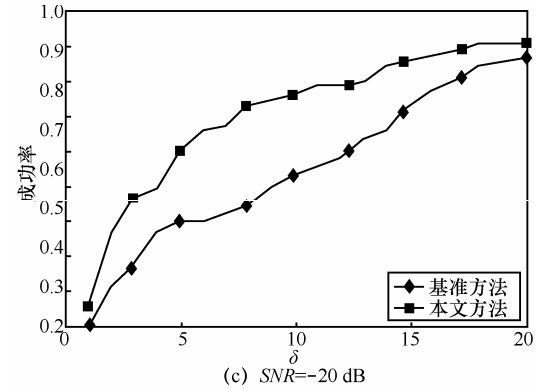
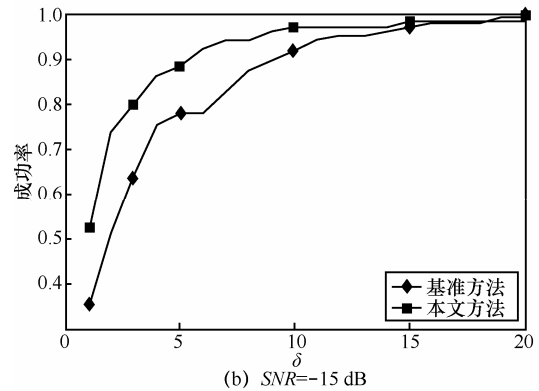
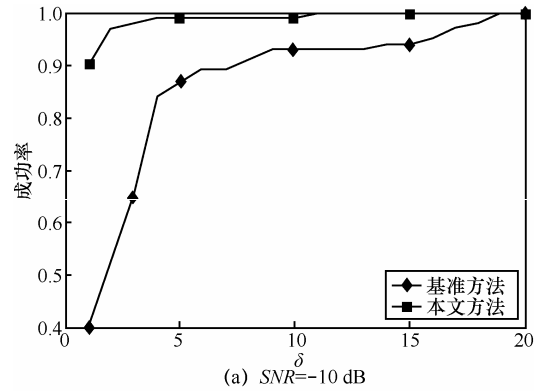


图 12 不同信噪比下，相对于不同  $\delta$  的信号提取成功率 (原始信号含 5 个不同频率)

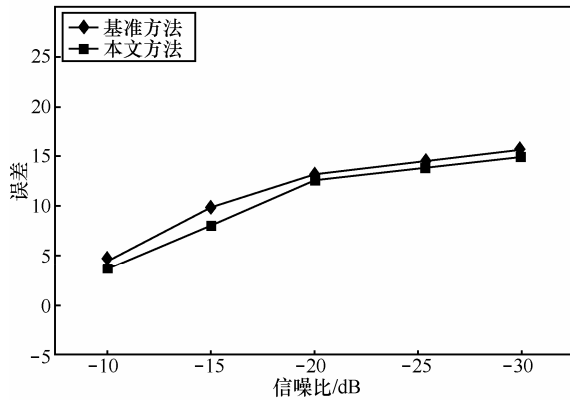


图 13 不同信噪比下信号提取的平均误差与标准误差 (原始信号含有 5 个不同频率)

表 4 不同信噪比下信号提取的平均误差和标准误差 (原始信号含有 5 个不同频率)

信噪比/dB	平均误差		标准误差	
	基准方法	本文方法	基准方法	本文方法
-10	3.31	0.51	4.37	1.30
-15	3.90	2.61	4.54	4.53
-20	7.83	6.23	9.05	7.56
-30	12.53	11.60	9.64	10.14

## 6 结束语

本文讨论了一种基于稀疏表达的信号提取及检测方法，即在混有高斯噪声的观测信号中，信号采样点区间未知的情况下，估计其采样点区间并同时重建待测信号。本文将对微弱信号的采样点区间估计与有效待测信号的精确重建整合到同一模型中。首先，基于稀疏表达方法建立了一种信号、噪声分离模型，并使用凸松弛技术求解该模型，得到对待测信号的粗略重建。接着，使用本文定义的匹配度定位待测信号的采样点区间，提取出带噪声的待测信号，并进行第二轮精确重建。同时本文开发了一种快速求解算法，大大减少了算法时间与空间复杂度。大量的实验结果证明本文讨论的基于稀疏表达的微弱信号提取及检测算法的顽健性与自适应能力。

### 参考文献:

[1] DONOHO D L, ELAD M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via  $\ell_1$  minimization[A]. Proceedings of

the National Academy of Sciences[C]. 2003, 100(5): 2197-2202.  
 [2] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.  
 [3] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.  
 [4] GRIBONVAL R, BACRY E. Harmonic decomposition of audio signals with matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(1): 101-111.  
 [5] ELAD M. Sparse and Redundant Representation[M]. Springer, 2010.  
 [6] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.  
 [7] EFRON B, HASTIE T, JOHNSTONE I M, et al. Least angle regression[J]. The Annals of Statistics, 2004, 32(2): 407-499.  
 [8] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Iterative thresholding for sparse approximations[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5): 629-654.  
 [9] MAIRAL J, BACH F, PONCE J, et al. Online Dictionary Learning for Sparse Coding[M]. Montreal, Canada, 2009.  
 [10] MAIRAL J, BACH F, PONCE J, et al. Online learning for matrix factorization and sparse coding[J]. The Journal of Machine Learning Research, 2001, 43(1):19-60.

### 作者简介:



汤雅妃 (1988-), 女, 四川德阳人, 中国联通研究院工程师, 主要研究方向为云计算、大数据、机器学习、信号检测等。



张云勇 (1976-), 男, 江苏盐城人, 中国联通研究院副院长、教授级高级工程师, 主要研究方向为大数据与分布式计算、SDN/NFV、移动互联网及业务、云计算、物联网等。



郭志斌 (1981-), 男, 甘肃兰州人, 中国联通研究院工程师, 主要研究方向为云计算和 IT 规划。